



Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 475–485.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
<http://nd.ics.org.ru>

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 530.182

MSC 2010: 37B20

Оценка размерности хаотических аттракторов с использованием времен возврата Пуанкаре

Я. И. Боев, Г. И. Стрелкова, В. С. Анищенко

На основе локальной теории возвратов Пуанкаре рассчитывается поточечная и информационная размерности хаотических аттракторов в двумерных негиперболических и гиперболических отображениях. Показано, что расчет средних времен возврата в зависимости от величины окрестности возврата определяет локальную поточечную размерность. Проводится сравнение поточечной, информационной, емкостной и ляпуновской размерностей. Оценивается влияние структуры аттракторов на результаты расчета размерностей.

Ключевые слова: возвраты Пуанкаре, вероятностная мера, фрактальная размерность

Введение

Одним из фундаментальных свойств динамических систем с заданной мерой является возвращаемость фазовой траектории в любую окрестность выбранного состояния динамической системы (возвращаемость Пуанкаре) [1]. К настоящему времени создана строгая теория возвратов Пуанкаре, устанавливающая количественные характеристики случайного

Получено 06 апреля 2015 года

После доработки 29 июля 2015 года

Статья частично поддержана РФФИ (грант № 15-02-02288) и Министерством образования и науки Российской Федерации.

Боев Ярослав Игоревич

boev.yaroslav@gmail.com

Стрелкова Галина Ивановна

strelkovagi@info.sgu.ru

Анищенко Вадим Семёнович

wadim@info.sgu.ru

Международный НИИ нелинейной динамики Саратовского Государственного университета
410026, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

процесса возвратов как в локальную окрестность начального состояния [2–5], так и в рассматриваемое множество в целом [6]. В развитии теории возвратов Пуанкаре разработан инструмент рекурсивных диаграмм [7, 8]. Теория возвратов активно применяется к исследованию экономических процессов [9], в плазменной физике [10], а также при анализе ДНК [11], электрокардиограмм [12], электроэнцефалограмм [13], для исследования «черных дыр» [14, 15] и в ряде других областей знаний.

Статистика времен возврата Пуанкаре активно используется при исследовании динамики нелинейных систем. В частности, в работе [16] рассматривается применение времен возврата к исследованию взаимной синхронизации, в статье [17] показано, как с помощью времен возврата можно диагностировать стохастический резонанс, также с помощью времен возврата можно исследовать фазочастотную синхронизацию [18]. В работах [19–21] описана возможность применения времен возврата для определения фрактальной размерности аттрактора. Однако по-прежнему есть ряд вопросов, связанных с тем, к какой из известных оценок фрактальной размерности ближе всего находится размерность, получаемая из последовательности времен возврата Пуанкаре. Интересным является вопрос о характере зависимости среднего минимального времени возврата от размера области возврата, а также влияние гиперболичности на эту зависимость. Настоящая работа посвящена изучению связи статистики времен возврата Пуанкаре с фрактальной размерностью аттрактора.

1. Связь времен возврата с поточечной и информационной размерностями

Пуанкаре доказал, что почти любая траектория спустя некоторое время вернется в сколь угодно малую окрестность своего начального состояния [1]. Такие траектории были названы устойчивыми по Пуассону. Время возврата Пуанкаре — это время, за которое фазовая траектория возвращается в окрестность своего начального состояния. Определим время возврата Пуанкаре для случая дискретной динамической системы следующим образом:

$$\tau_r(\vec{x}_0) = \min\{n \in \mathbb{N} : T^n(\vec{x}_0) \in B_r(\vec{x}_0)\}, \quad (1.1)$$

где $\tau_r(\vec{x}_0)$ — это время возврата в окрестность начального состояния \vec{x}_0 , $B_r(\vec{x}_0)$ — \mathbb{N} -мерный шар радиуса $r = \varepsilon/2$, $T^n(\vec{x}_0)$ — отображение метрического пространства $T: X \rightarrow X$, примененное n раз к точке \vec{x}_0 . В дальнейшем индекс r опустим и будем везде обозначать время возврата τ .

Ряд закономерностей в теории возвратов Пуанкаре получен в асимптотическом приближении $\varepsilon \rightarrow 0$ [4, 6]. Нас будет интересовать взаимосвязь среднего времени возврата с размерностью рассматриваемого множества. Эта взаимосвязь следует из леммы Каца [23, 24],

$$\langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle = \frac{1}{\mu(\vec{x}_0, \varepsilon)}, \quad (1.2)$$

связывающей вероятность $\mu(B_r(\vec{x}_0))$ со средним временем возврата $\langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle$. Отметим, что (1.2) справедливо при любом ε , если ε -окрестность включена в рассматриваемое множество. Как показано, например, в [22], при стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$ из (1.2) следует

$$\ln \langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle \approx a - d_F \ln \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (1.3)$$

где d_F — фрактальная размерность множества, $a = \ln[1/\mu(\vec{x}_0)]$ — константа для заданного \vec{x}_0 . Задача состоит в том, чтобы определить, какой из величин размерностей (поточечной,

информационной, емкостной или ляпуновской) отвечает величина d_F , задающая наклон линейной зависимости (1.3).

При проведении реальных численных экспериментов используются малые, но конечные величины ε [23]. В работе [24] была исследована статистика времен возврата при условии конечного размера окрестности возврата. При вычислении времени возврата следует учитывать ряд нюансов. Так, в работе [19] дано определение времен возвратов двух типов. Если придерживаться приведенной в работе [19] классификации, то в нашей статье рассматриваются только времена возврата второго типа, которые вычисляются как разность между временем входа фазовой траектории в рассматриваемую окрестность и временем предыдущего выхода траектории из этой окрестности. Сама окрестность точки \vec{x}_0 берется для простоты вычислений в форме N -мерного куба с длиной грани, равной ε .

Нас будет интересовать среднее время возврата Пуанкаре, которое вычисляется следующим образом:

$$\langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i(\vec{x}_0, \varepsilon), \quad (1.4)$$

где N — количество возвратов фазовой траектории в ε -окрестность точки \vec{x}_0 .

Как уже отмечалось, времена возврата связаны с фрактальной размерностью аттрактора [5]. Существует не так много работ, где проводится численный анализ размерности аттрактора с помощью времен возврата и ее сопоставление с другими оценками фрактальной размерности. Так, в работе [19] на примере отображения Эно и системы Лоренца была показана связь времен возврата с поточечной d_P и информационной d_I размерностями. В работе [20] проводилось вычисление локальной размерности с помощью времен возврата и времен ожидания. Однако ряд вопросов требует дополнительных исследований.

Рассмотрим взаимосвязь времени возврата с фрактальной размерностью аттрактора. В работе [5] доказано, что фрактальная размерность определяется следующим соотношением:

$$d_\tau(\vec{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle}{-\ln \varepsilon}, \quad (1.5)$$

где d_τ — это фрактальная размерность, определяемая из последовательности времен возврата, вычисленных в окрестности точки \vec{x}_0 . Поточечная размерность задается следующим выражением:

$$d_P(\vec{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B_\varepsilon(\vec{x}_0))}{\ln \varepsilon}, \quad (1.6)$$

где $\mu(B_\varepsilon(\vec{x}_0))$ — вероятность. Если учесть лемму Каца (1.2), то получаем, что размерность, определяемая с помощью времен возврата, равна поточечной размерности $d_\tau = d_P$. Рассмотрим это на примере отображения Эно

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Выберем на аттракторе точку \vec{x}_0 и будем считать времена возврата в ее ε -окрестность. Из рисунка 1а видно, что величина, обратная вероятностной мере, действительно совпадает со средним временем возврата. Размерности d_τ и d_P будут определяться по наклону аппроксимирующей прямой на рисунке 1а, которая является одной и той же как для зависимости среднего времени возврата $\ln \langle \tau_r \rangle$, так и для вероятностной меры $-\ln \mu$ от размера

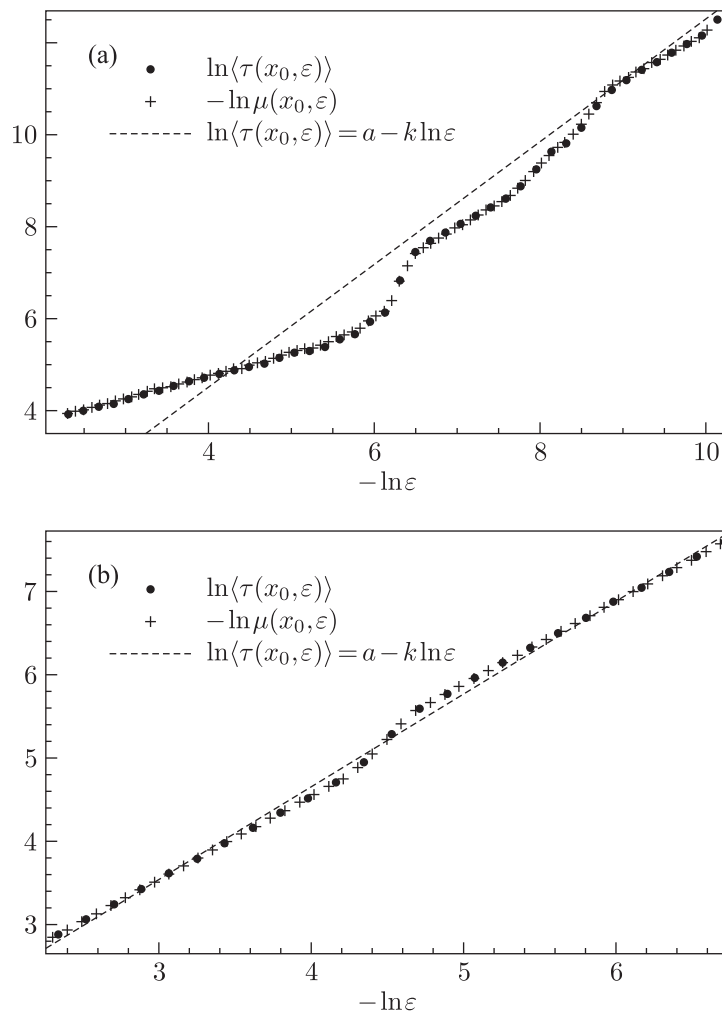


Рис. 1. (а) Зависимость среднего времени возврата $\ln\langle\tau(\vec{x}^0, \varepsilon)\rangle$ и величины обратно пропорциональной вероятности $-\ln\mu(\vec{x}^0, \varepsilon)$ от ε в окрестности точки с координатами $x_0 = -0.581544$, $y_0 = 0.334912$ в отображении Эно (1.7) при значениях параметров $a = 1.4$, $b = 0.3$. (б) Зависимость среднего времени возврата $\ln\langle\tau(\vec{x}^0, \varepsilon)\rangle$ и величины обратно пропорциональной вероятности $\ln(1/\mu(\vec{x}^0, \varepsilon)) = -\ln\mu(\vec{x}^0, \varepsilon)$ от размера окрестности возврата точки с координатами $x_0 = -1.28232$, $y_0 = 0.380794$ в отображении Лози (1.8) при значениях параметров $a = 1.4$, $b = 0.3$.

окрестности возврата $-\ln\varepsilon$. Таким образом, размерности, определенные по формулам (1.5) и (1.6), равны между собой.

Вычисления для различных одномерных и двумерных хаотических отображений показали, что получаемые результаты существенно зависят от того, является ли аттрактор гиперболическим или негиперболическим. Проиллюстрируем этот факт на конкретных примерах. Рассмотрим квазигиперболический аттрактор в системе Лози

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a|x_n| + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (1.8)$$

задав значения параметров $a = 1.4$, $b = 0.3$. Результаты расчетов представлены на рисунке 1б. Как видно из графиков, в локальной окрестности выбранной точки аттрактора

$-\ln \mu(\vec{x}_0, \varepsilon) = \ln \langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle$, что следует из леммы Каца. Отклонение экспериментальных точек от аппроксимирующей прямой с наклоном $|k| = 1.12$ не превышает $\pm 1\%$. Наклон соответствует величине поточечной размерности d_P (1.6). В силу того, что аттрактор Лози является квазигиперболическим, его структура достаточно однородна, то есть вероятность относительно слабо меняется по аттрактору.

Для различных точек на негиперболическом аттракторе размерность d_τ (а следовательно, и d_P) будет довольно сильно меняться. Возьмем на аттракторе отображения Эно три точки и рассчитаем в них размерность с помощью времен возврата. Из графиков, представленных на рисунке 2, видно, что зависимости среднего времени возврата $\langle \tau \rangle$ для разных точек отличаются, а следовательно, размерность d_τ будет также различной.

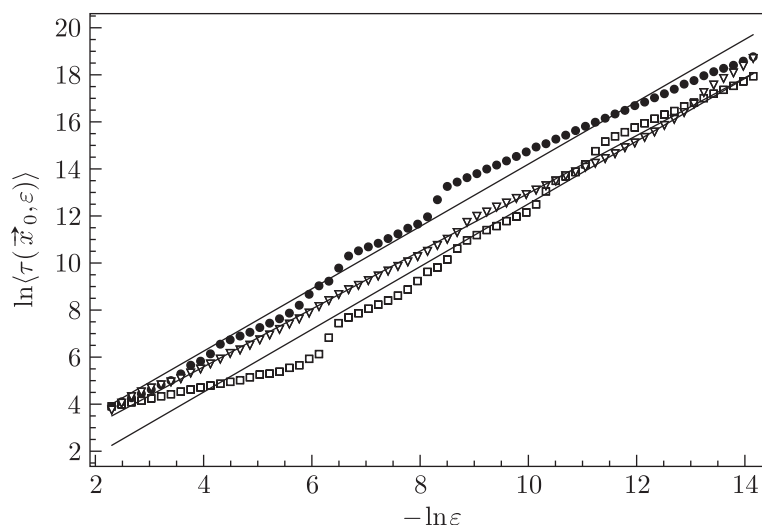


Рис. 2. Зависимость среднего времени возврата $\ln \langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle$ от размера окрестности возврата $-\ln \varepsilon$ в трех точках с координатами $x_0 = -1.28232$, $y_0 = 0.380794$ (квадраты), $x_0 = 0.648659$, $y_0 = 0.18504$ (черные круги), $x_0 = 0.683452$, $y_0 = 0.0524166$ (треугольники) для отображения Эно (1.7) при значениях параметров $a = 1.4$, $b = 0.3$.

Для того чтобы более наглядно проиллюстрировать это, рассчитаем поточечную размерность $d_P(\vec{x}_i)$ в 500 случайно выбранных точках аттрактора \vec{x}_i . Из графиков, представленных на рисунке 3, видно, что величина вычисленной размерности довольно сильно меняется от точки к точке. Так, поточечная размерность d_P может принимать значения в диапазоне $0.7 < d_P < 2$.

Можно утверждать, что размерность, определяемая с помощью времен возврата Пуанкаре, является локальной величиной и не может характеризовать размерность всего аттрактора. Можно провести усреднение этой размерности по достаточному количеству точек N на аттракторе. Так, в работе [25] показано, что средняя поточечная размерность

$$d_p = \int_A d_P(\vec{x}) d\mu(\vec{x}) \quad (1.9)$$

равна информационной размерности

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \frac{\mu(\vec{x}_i, \varepsilon) \ln \mu(\vec{x}_i, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (1.10)$$

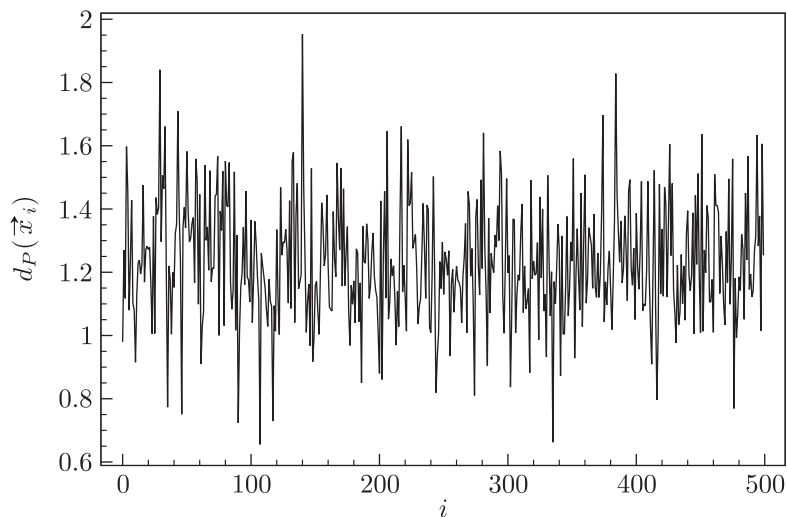


Рис. 3. Поточечная размерность $d_P(\vec{x}_i)$ в зависимости от номера точки \vec{x}_i , в окрестности которой она была рассчитана для отображения Эно (1.7).

В работе [19] показана связь времен возврата с поточечной размерностью d_P . Автор полагает равную информационной поточечную размерность и заменяет d_P на d_I , не проводя никаких усреднений. Как было показано выше, с помощью времен возврата Пуанкаре действительно можно оценить информационную размерность, однако для этого необходимо проводить усреднение по достаточному большому количеству точек:

$$\langle d_P \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_P(\vec{x}_i). \quad (1.11)$$

Отметим работу [20], где проводилось вычисление локальной размерности с помощью времен возврата и времен ожидания для различных отображений. Полученные значения размерности сопоставлялись только с емкостной размерностью. Сопоставим размерность d_τ с другими оценками фрактальной размерности. Для этого вычислим поточечную размерность d_P (которая равна d_τ) и проведем усреднение по достаточному количеству точек (500 точек) на аттракторе. Затем сравним полученное значение средней поточечной размерности с ляпуновской d_L , информационной d_I и емкостной d_C размерностями. В таблице 1 представлены результаты расчета размерностей для отображения Эно (1.7) и модифицированного отображения Арнольда (1.12), которое является гиперболическим:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n, \mod 1, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \mod 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из таблицы 1 следует, что средняя поточечная размерность $\langle d_P \rangle$ ближе всего к информационной d_I и ляпуновской d_L . Средняя поточечная размерность $\langle d_P \rangle$ получилась немного меньше, чем информационная d_I , это скорее всего вызвано тем, что при вычислении $\langle d_P \rangle$ проводилось усреднение по случайно взятым точкам на аттракторе, окрестности которых не полностью покрывают аттрактор.

Таблица 1. Сравнение размерностей в отображении Эно (1.7) и модифицированном отображении Арнольда (1.12)

Отображение Эно				
a, b	$\langle d_P \rangle$	d_I	d_L	d_C
1.4, 0.3	1.23	1.25	1.25	1.25
1.07, 0.5	1.25	1.27	1.28	1.31
Модифицированное отображение Арнольда				
δ	$\langle d_P \rangle$	d_I	d_L	d_C
0.05	1.94	1.97	1.97	2.00
0.10	1.85	1.89	1.89	2.00

2. Геометрическая структура аттрактора и времена возврата

Рассмотрим связь геометрии аттрактора с временами возврата Пуанкаре. Исследуем более детально поведение зависимости среднего времени возврата $\langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle$ от размера окрестности возврата ε на примере отображения Эно (1.7). На рисунке 4 представлен график зависимости $\langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle$ от ε и построены аппроксимирующие прямые характерных повторяющихся наклонов. Зависимость на графике представляет собой череду наклонов, приблизительно равных $|k_i| \approx 1$, и переходов между ними. Построим области фазового портрета для различных размеров окрестностей возврата, соответствующих единичным наклонам и переходам между ними. Областям размером $\varepsilon_2 = 0.0122590$, $\varepsilon_4 = 0.0005262$ соответствуют наклоны $|k_2| = 1.00$, $|k_3| = 0.98$ и фрагменты (2), (4), на которых геометрическая структура аттрактора, попавшего в окрестность возврата, близка по форме к прямой линии. Размерность линии равна 1, что как раз соответствует величине наклонов $|k_2| = 1.00$ и $|k_3| = 0.98$. Размеры окрестностей ε_1 и ε_3 соответствуют переходным участкам, где наклон отличается от единичного, а на соответствующих фрагментах фазового портрета (1) и (3) структура аттрактора представляет собой две прямые линии, то есть размерность будет отличаться от 1. Таким образом, на примере отображения Эно (1.7) можно показать, что характер зависимости $\langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle$ от ε обусловлен локальной геометрической структурой аттрактора в исследуемой окрестности. Аналогичные результаты получены для отображения Лози [26].

Влияние геометрической структуры аттрактора удобно наблюдать при наличии шумового воздействия на систему. Рассмотрим отображение Эно при аддитивном воздействии шума:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n + \sqrt{2D}\xi(n), \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\xi(n)$ — белый гауссов шум, а D — интенсивность шумового воздействия. Представленная на рисунке 5 зависимость среднего времени возврата $\langle \tau \rangle$ от размера области возврата ε имеет два характерных наклона. Наклон, соответствующий большим ε , примерно равен 1, тогда как наклон в диапазоне при достаточно малых ε равен 2. Это можно объяснить тем, что при наличии шумового воздействия аттрактор отображения «расплывается». Таким образом, при наблюдении времен возврата в большую окрестность мы будем видеть линию,

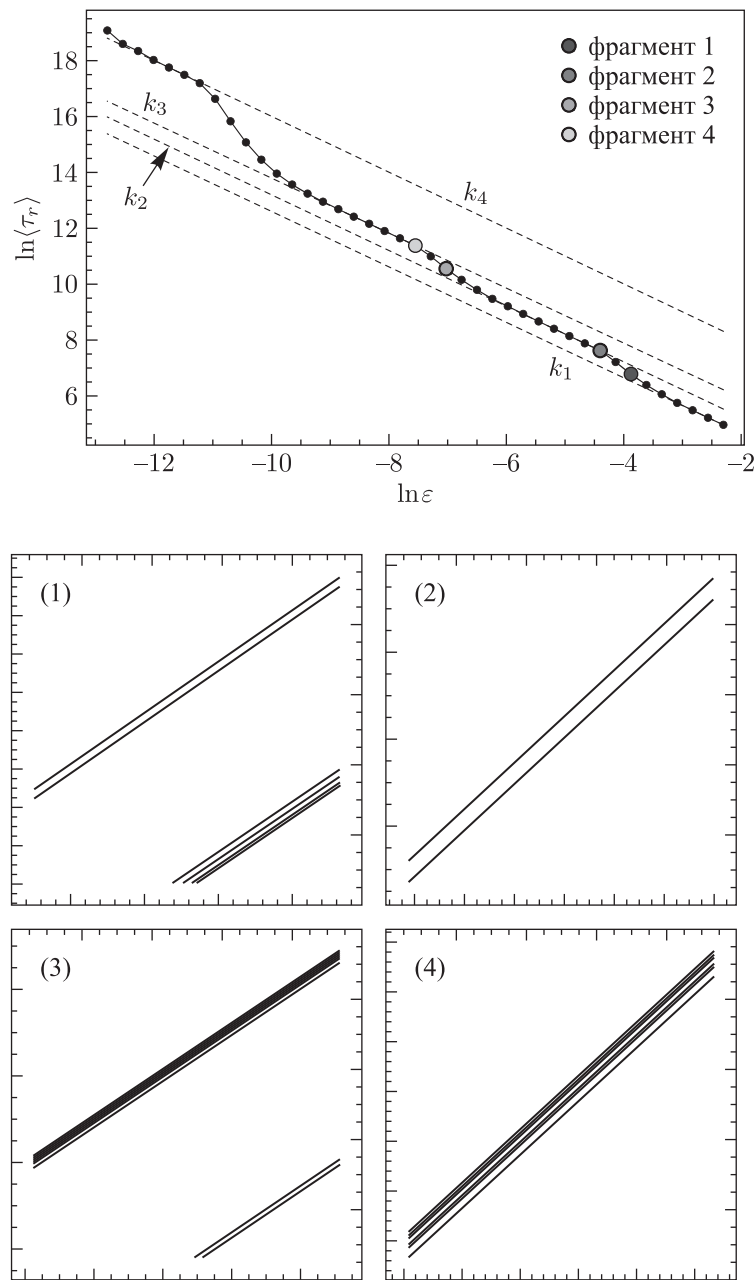


Рис. 4. Зависимость среднего времени возврата Пуанкаре $\ln \langle \tau(\vec{x}_0, \varepsilon) \rangle$ от диаметра окрестности возврата $\ln \varepsilon$ точки с координатами $x_0 = 0.61787$, $y_0 = -0.707575$. Ниже показаны фрагменты фазового портрета аттрактора, попавшие в окрестность возврата, для разного размера окрестности возврата: (1) $\varepsilon_1 = 0.0207176$, (2) $\varepsilon_2 = 0.0122590$, (3) $\varepsilon_3 = 0.0008892$, (4) $\varepsilon_4 = 0.0005262$. Использованы следующие значения параметров: $a = 1.4$, $b = 0.3$. Модули наклона аппроксимирующих прямых: $|k_1| = 0.99$, $|k_2| = 1.00$, $|k_3| = 0.98$, $|k_4| = 1.00$.

размерность которой равна 1, а для достаточно малых областей возврата ε изображающие точки будут полностью заполнять фазовое пространство, то есть мы будем видеть заполненную поверхность, размерность которой равна 2, что вполне согласуется с видом зависимости $\langle \tau \rangle$ от ε .

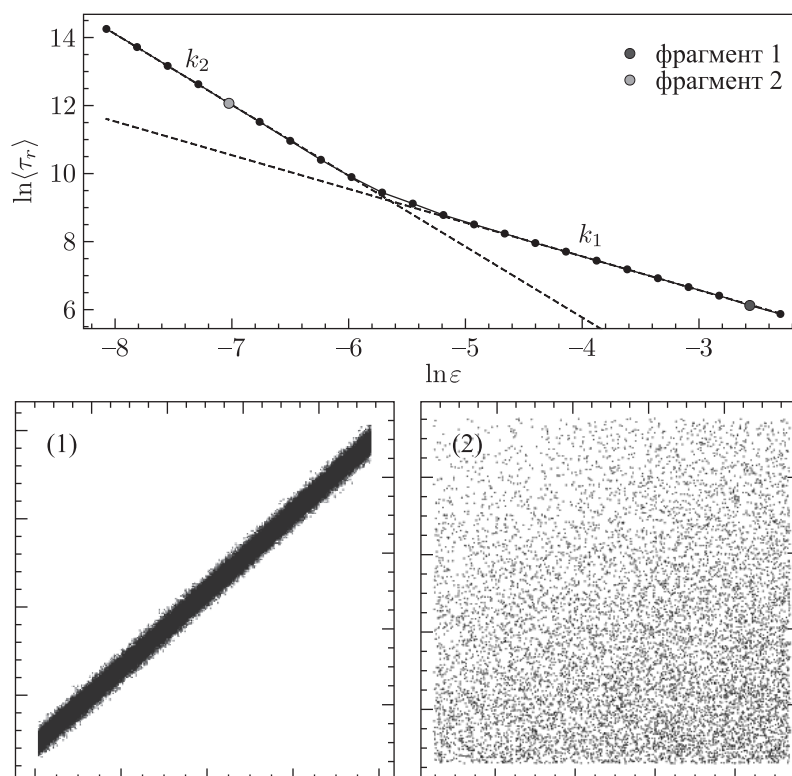


Рис. 5. Зависимость среднего времени возврата Пуанкаре $\ln\langle\tau(\vec{x}_0, \varepsilon)\rangle$ от размера окрестности возврата $\ln\varepsilon$ точки с координатами $x_0 = -0.22051107203702$, $y_0 = -0.77749266778$ для отображения Эно под шумовым воздействием (2.1). На фрагментах 1–2 показаны части фазового портрета аттрактора, попавшие в окрестность возврата, для разного размера окрестности возврата: (1) $\varepsilon_1 = 0.076923027$, (2) $\varepsilon_2 = 0.0008892412$. Использованы следующие значения параметров: $a = 1.4$, $b = 0.3$; интенсивность шума $D = 10^{-6}$. Модули наклона аппроксимирующих прямых: $|k_1| = 0.99$, $|k_2| = 2.08$.

3. Заключение

Численными экспериментами установлено, что в общем случае размерность d_f в (1.3) определяется по наклону усредненной линейной зависимости и соответствует локальной поточечной размерности аттрактора d_P системы в окрестности области возврата ε . Точность определения d_P зависит от структуры аттрактора и является наиболее высокой, если аттрактор гиперболический. Величина информационной размерности в общем случае должна вычисляться как среднее значение поточечной размерности по аттрактору системы. Иногда может иметь место приближенное равенство поточечной и информационной размерностей, однако в общем случае это не верно.

Можно сделать следующий вывод. Использование теории времен возвратов Пуанкаре с помощью соотношения (1.3) дает возможность численной оценки размерности аттрактора. При этом наиболее точные результаты получаются для гиперболических аттракторов, когда локальная структура аттрактора близка к глобальной. В случае негиперболических аттракторов, структура которых существенно неоднородна, статистика времен возврата Пуанкаре в окрестность заданной точки аттрактора дает возможность определения поточечной размерности, которая отличается от размерности аттрактора в целом.

Список литературы

- [1] Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // *Acta Math.*, 1890, vol. 13, pp. 1–270.
- [2] Chetaev N. G. Sur la stabilité à la Poisson // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1928, vol. 187, pp. 637–638.
- [3] Четаев Н. Г. Об устойчивости в смысле Пуассона // *Учен. зап. Казан. гос. ун-та*, 1929, т. 89, № 2, с. 199–201.
- [4] Hirata M., Saussol B., Vaienti S. Statistics of return times: A general framework and new applications // *Comm. Math. Phys.*, 1999, vol. 206, no. 1, pp. 33–55.
- [5] Barreira L. Dimension and recurrence in hyperbolic dynamics. (*Progr. Math.*, vol. 272.) Basel: Birkhäuser, 2008. 300 pp.
- [6] Afraimovich V. S. Pesin's dimension for Poincaré recurrences // *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 12–20.
- [7] Eckmann J.-P., Oliffson Kamphorst S., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems // *Europhys. Lett.*, 1987, vol. 4, no. 9, pp. 973–978.
- [8] Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems // *Phys. Rep.*, 2007, vol. 438, nos. 5–6, pp. 237–329.
- [9] Baptista M. S., Caldas I. L. Stock market dynamics // *Phys. A*, 2002, vol. 312, nos. 3–4, pp. 539–564.
- [10] Baptista M. S., Caldas I. L., Heller M. V. A. P., Ferreira A. A., Bengtson R. D., Stöckel J. Recurrence in plasma edge turbulence // *Phys. Plasmas*, 2001, vol. 8, no. 10, pp. 4455–4462.
- [11] Frahm K. M., Shepelyansky D. L. Poincaré recurrences of DNA sequences // *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 1, 016214, 5 pp.
- [12] González H., Infante O., Pérez-Grovas H., Jose M. V., Lerma C. Nonlinear dynamics of heart rate variability in response to orthostatism and hemodialysis in chronic renal failure patients: Recurrence analysis approach // *Med. Eng. Phys.*, 2013, vol. 35, no. 2, pp. 178–187.
- [13] Acharya U. R., Sree S. V., Chattopadhyay S., Yu W., Ang P. Ch. A. Application of recurrence quantification analysis for the automated identification of epileptic EEG signals // *Int. J. Neural Syst.*, 2011, vol. 21, no. 3, pp. 199–211.
- [14] Siopsis G. Poincaré recurrences of Schwarzschild black holes // *Classical Quantum Gravity*, 2007, vol. 24, no. 16, pp. 4133–4145.
- [15] Barbón J. L. F., Rabinovici E. Very long time scales and black hole thermal equilibrium // *J. High Energy Phys.*, 2003, no. 11, 047, 27 pp.
- [16] Afraimovich V. S., Lin W.-W., Rulkov N. F. Fractal dimension for Poincaré recurrences as an indicator of synchronized chaotic regimes // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2000, vol. 10, no. 10, pp. 2323–2337.
- [17] Anishchenko V. S., Boev Ya. I. Diagnostics of stochastic resonance using Poincaré recurrence time distribution // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 953–958.
- [18] Boev Ya. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Poincaré recurrence statistics as an indicator of chaos synchronization // *Chaos*, 2014, vol. 24, no. 2, 023110, 7 p.
- [19] Gao J. B. Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 83, no. 16, pp. 3178–3181.
- [20] Carletti T., Galatolo S. Numerical estimates of local dimension by waiting time and quantitative recurrence // *Phys. A*, 2006, vol. 364, pp. 120–128.
- [21] Анищенко В. С., Бирюкова Н. И., Астахов С. В., Боев Я. И. Время возврата Пуанкаре и локальная размерность хаотических аттракторов // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 3, с. 449–460.
- [22] Анищенко В. С., Астахов С. В. Теория возвратов Пуанкаре и ее приложение к задачам нелинейной физики // *УФН*, 2013, т. 183, № 10, с. 1009–1028.
- [23] Anishchenko V. S., Khairulin M., Strelkova G., Kurths J. Statistical characteristics of the Poincaré return times for a one-dimensional nonhyperbolic map // *Eur. Phys. J. B*, 2011, vol. 82, nos. 3–4, pp. 219–225.

- [24] Altmann E. G., da Silva E. C., Caldas I. L. Recurrence time statistics for finite size intervals // *Chaos*, 2004, vol. 14, no. 4, pp. 975–981.
- [25] Theiler J. Estimating fractal dimension // *J. Opt. Soc. Amer. A*, 1990, vol. 7, no. 6, pp. 1055–1073.
- [26] Lozi R. Un attracteur étrange (?) du type attracteur de Hénon // *J. Phys. Colloques*, 1978, vol. 39, no. C5, pp. C5-9–C5-10.

Estimating dimensions of chaotic attractors using Poincaré recurrences

Yaroslav I. Boev¹, Galina I. Strelkova², Vadim S. Anishchenko³

^{1,2,3} International Institute of Nonlinear Dynamics Saratov State University
410026, Russia, Saratov, 83 Astrakhanskaya st.

¹boev.yaroslav@gmail.com, ²strelkovagi@info.sgu.ru, ³wadim@info.sgu.ru

The local theory of Poincaré recurrences is applied to estimate pointwise and information dimensions of chaotic attractors in two-dimensional nonhyperbolic and hyperbolic maps. It is shown that the local pointwise dimension can be defined by calculating the mean recurrence times depending on the return vicinity size. The values of pointwise, information, capacity, and Lyapunov dimensions are compared. It is also analyzed how the structure of attractors can affect the calculation of the dimensions.

MSC 2010: 37B20

Keywords: Poincaré recurrence, probability measure, fractal dimension

Received April 06, 2015, accepted July 29, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 475–485 (Russian)